Eine genauere Untersuchung über Brachystochronen*

Leonhard Euler

§1 Nachdem ich im zweiten Buch meiner *Mechanica* diesen Gegenstand behandelt hatte, war ich auf diese außerordentliche Eigenschaft gestoßen, dass, während ein Körper über einer Brachystochrone hinabgeleitet, der aus allen angreifenden Kräften entstandene Druck immer gleich der Zentrifugalkraft ist und in dieselbe Richtung wirkt, sodass überall der ganze Druck, welchen ein herabsinkender Körper auf die Kurve ausübt, doppelt so groß ist wie der aus den angreifenden Kräften allein entstehende Druck. Und ich habe nicht nur entdeckt, dass diese Eigenschaft bei der Annahme der natürlichen Schwerkraft, und wannimmer der Körper zu einem gewissen festen Kraftzentrum von irgendwelchen Kräften bewegt wird, Geltung hat, sondern auch wannimmer der Körper zu zwei oder mehr festen Punkten von irgendwelchen Kräften bewegt wird. Deswegen habe ich nicht bezweifelt, diese Eigenschaft als universelles Prinzip aufzustellen, mit dessen Hilfe in vollkommen allen Fällen die Brachystochronen gefunden werden können und es nicht nötig ist, zur isoperimetrischen Methode zurückzukehren.

§2 Aus diesem Prinzip habe also danach auch alle Brachystochronen in resistierenden Medien abgeleitet. Nachdem ich aber die isoperimetrische Methode umfassender untersucht hatte, habe ich bald entdeckt, dass dieses Prinzip in einem resistierenden Medium nicht zugelassen werden kann, und

*Originaltitel: "Investigatio accuratior circa brachystochronas", zuerst publiziert in: *Mémoires de l'académie des sciences de St.-Petersbourg, Band 8* (1822, geschrieben 1780): pp. 17 – 28, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 25, pp. 314 – 325, Eneström Nummer E758, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

dennoch hat niemand derer, die mein Werk zur Mechanik mit ganzem Eifer studiert haben, diesen Mangel angemerkt, welchen ich aber selbst in meinem Traktat über die isoperimetrischen Problem mit so glücklichem Erfolg behoben habe und sogar die wahren Brachystochronen für jedwedes resistierende Medium zu bestimmen gelehrt habe.

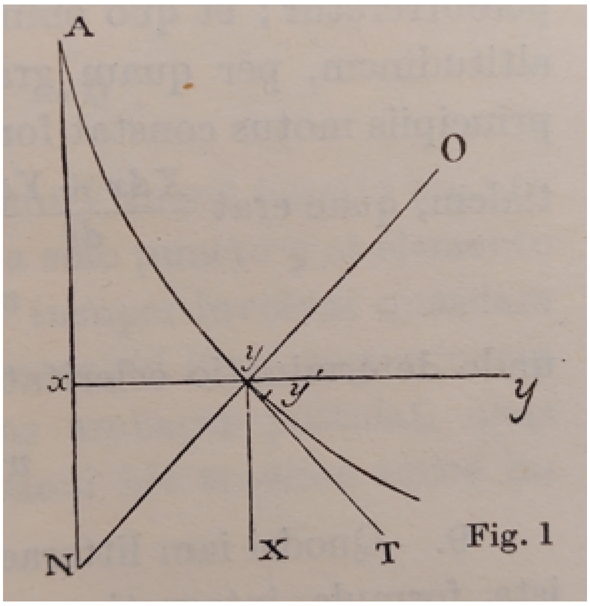
§3 Indes ist dieser Fehler, welchen ich ehrlich eingeräumt habe, nicht so riesig, dass er nicht nur in gewisser Weise entschuldigt, sondern sogar mit der Wahrheit in Einklang gebracht werden kann, wenn nur die Formulierung der Frage ein wenig abgewandelt wird. Wenn nämlich nicht unter vollkommen allen Kurven, welche sich von der oberen Grenze bis hin zu einer unteren zeichnen lassen, sondern nur unter denen, über welchen der herabsinkende Körper dieselbe Geschwindigkeit aufnimmt (deren Anzahl natürlich immer noch unendlich ist), die gesucht wird, über welcher der Körper in kürzester Zeit vom obersten Punkt bis hin zum untersten gelangt, dann werden alle von mir angegeben und aus dem erwähnten Prinzip abgeleiteten Brachystochronen mit der Wahrheit verträglich sein.

§4 Damit aber klarer wird, unter welchen Bedingungen dieses Prinzip Geltung hat und wann es fehlerhaft ist, habe ich beschlossen, die Theorie über die Brachystochronen genauer zu entwickeln. Ich habe nämlich beobachtet, auch wenn die Bewegung nur im Vakuum betrachtet wird, dass dennoch Kräfte von solcher Art dargeboten werden können, auf welche jenes Prinzip keinesfalls angewandt werden kann; deswegen werde ich diese Stelle dieser Stelle den Geist von allem Widerstand lösen, weil dieser Gegenstand ja in meinem Werk zum isoperimetrischen Problem schon hinreichend umfassend abgehandelt worden ist. Deswegen werde ich keine anderen Kräfte betrachten außer solchen, welche ich *absolute* genannt habe, deren Wirkung allein vom Ort, an welchem der Körper sich befindet, abhängt, und seine Geschwindigkeit nicht irgendetwas zu den angreifenden Kräften beiträgt.

§5 Diese Abhandlung wird aber weiter in zwei Teile geteilt, je nachdem ob die ganze Bewegung des Körpers in derselben Ebene ausgeführt wird oder aus derselben Ebene hinausführt. Für diesen Unterschied muss nämlich eine völlig andere Methode die Brachystochronen zu finden angewandt werden, weil im ersten Fall zwei in die Rechnung einzuführende Koordinaten ausreichen, im zweiten Fall hingegen notwendigerweise drei Koordinaten verlangt werden, welcher Fall sogar vollkommen neu ist; und freilich kam niemandem, sofern ich mich freilich entsinne, in den Sinn, Brachystochronen, welche nicht in derselben Ebene enthalten sind, zu erforschen; deswegen werde ich dieser Unterscheidung gemäß die folgende Behandlung in zwei Teilen vorlegen.

I. ÜBER IN DERSELBEN EBENE LIEGENDE BRACHYSTOCHRONEN

§6 Hier müssen also auch alle angreifenden Kräfte in derselben Ebene gelegen sein, welche ich aber hier sehr allgemein betrachten werde. Wir wollen also festlegen, dass die Bewegung des Körpers in der Tischebene (Fig. 1) ausgeführt wird und es sei Ay die Kurve, über welche der Körper bewegt wird, nachdem sie vom Punkt A aus begonnen hatte, welche Kurve wir auf die Achse Ax beziehen und die beiden Koordinaten $Ax = x$ und $xy = y$ nennen wollen, das Kurvenelement yy' wollen wir hingegen ds nennen, sodass nach Setzen von $dy = pdx$ dann $ds = dx\sqrt{1+pp}$ ist;



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

daher, wenn yO der Krümmungsradius der Kurve war, ist bekannt, dass $yO = \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$ sein wird. Nun werde der Körper von irgendwelchen Kräften angegriffen, sie lassen sich immer auf die zwei yX und yY zurückführen, welche dieselbe Richtung haben wie die Koordinaten. Wir wollen also diese Kräfte $yX = X$ und $yY = Y$ nennen, und weil die Wirkung dieser Kräfte vom Ort des Körpers y allein abhängig angenommen wird, lassen sich diese Buchstaben X und Y als beliebige Funktionen der beiden Koordinaten x und y ansehen. Aber dann betrachte ich diese Kräfte nun als Beschleunigungen, welche entstehen, wenn die wahren Bewegungskräfte durch die Masse des Körpers geteilt werden und daher in absoluten Zahlen ausgedrückt werden, während die Einheit die beschleunigende Kraft der natürlichen Schwerkraft bezeichnet, mit welcher sich alle anderen Kräfte vergleichen lassen.

§7 Weil also, während der Körper über der Kurve Ay herabsinkt, er an dieser Stelle y die Wirkung der zwei Kräfte $yX = X$ und $yY = Y$ erfährt, löse man diese Kräfte gemäß der Richtung der Bewegung oder der Tangente yT und die gemäß der zur ihr normalen Richtung yN auf und man wird die Tangentialkraft $yT = \frac{Xdx+Ydy}{ds}$ finden, aber die Normalkraft $yN = \frac{Xdy-Ydx}{ds}$, von welchen jene die Bewegung des Körpers über das Element yy' beschleunigt werden wird, aber die andere Normalkraft, wenn sie mit der Masse des Körpers multipliziert wird, wird den Druck geben, welchen der Körper auf die Kurve ausübt, welcher, wenn die Masse des Körpers mit M multipliziert wird, sein $\frac{M(Xdy-Ydx)}{ds}$ wird, welcher also gemäß des oben aufgestellten Prinzips der aus der Krümmung für die Brachystochrone entstandenen Zentrifugalkraft des Körpers gleich sein müsste.

§8 Wir wollen nun die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper des Element yy' durchläuft, mit dem Buchstaben v bezeichnen, welche den Raum ausdrücke, welcher mit dieser Geschwindigkeit in einer Minutensekunge durchlaufen werden würde; und damit wir alles auf bestimmte Maße zurückführen, bezeichne g die Höhe, durch welche schwere Körper in der ersten Minutensekunde herabsinken werden, und aus den Prinzipien der Bewegung ist bekannt, dass $vdv = 2gTds$ sein wird, wenn freilich T die tangentiale Kraft bezeichnet, welche $\frac{Xdx+Ydy}{ds}$ war, woraus diese Gleichung folgt:

$$vdv = 2g(Xdx + Ydy);$$

daher hängt die Bestimmung der Geschwindigkeit von der Integration dieser Formel ab, weil

$$vv = 4g \int (Xdx + Ydy)$$

ist.

§9 Wenn also nun die Buchstaben X und Y solche Funktionen von x, y waren, dass diese Formel eine Integration zulässt, was passiert, wie bekannt ist, wenn $\left(\frac{dX}{dy}\right) = \left(\frac{dY}{dx}\right)$ war, dann wird die Geschwindigkeit v des Körpers eine vollkommen bestimmte Funktion der zwei Variablen x und y sein und daher allein von der Position des Körpers y abhängen. Wenn aber diese Bedingung keine Geltung hat, dann wird die Geschwindigkeit nicht weiter von seiner Position y allein abhängen, sondern wird darüber hinaus den ganzen Verlauf der schon überstrichenen Kurve Ay involvieren, gemäß der Werte, welche die Formel Xdx und Ydy durch den ganzen durchlaufenden Bogen Ay erhält; daher tauchen hier zwei sorgsam voneinander zu unterscheidende Fälle auf, je nachdem ob natürlich die Formel $Xdx + Ydy$ einer Integration fähig ist oder nicht. Bald wird nämlich klar werden, dass das oben erwähnte Prinzip allein in dem ersten Fall Geltung hat, in dem anderen Fall hingegen aber keinesfalls verwendet werden kann.

§10 Weil nämlich der winzig kleine Zeitabschnitt, in welchem das Kurvenelement

$$yy' = ds = dx\sqrt{1 + pp}$$

durchlaufen wird, $\frac{ds}{v}$ ist, damit die Zeit über die Kurve Ay minimal wird oder diese Kurve eine echte Brachystochrone ist, ist es notwendig, dass die Integralformel

$$\int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx\sqrt{1 + pp}}{v}$$

unter allen Kurven, welche sich vom Punkt A aus zum Punkt y zeichnen lassen, den kleinsten Wert erhält. In meinem Traktat zum isoperimetrischen Problem habe ich aber gezeigt, wenn irgendeine Integralformel $\int Vdx$ ein Maximum oder ein Minimum sein muss, wo V wie auch immer nicht nur von den Koordinaten x und y selbst abhängt, sondern auch von der Relation zwischen deren Differentiale von jedweder Ordnung, sodass nach Setzen von, wie wir es schon oben getan haben, $dy = pdx$ weiter $dp = qdx$, $dq = rdx$, $dr = sdx$ etc. gesetzt wird und

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

war, dass dann für den Fall des Maximums oder Minimums immer diese Gleichung Geltung hat:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.} = 0,$$

welche Gleichung also nur dann Geltung hat, wannimmer V eine Funktion der Größen x, y, p, q, r etc. war, das heißt, wannimmer ihr Wert allein vom Punkt y und dem Kurvenelement an dieser Stelle abhängt. Wannimmer nämlich die Funktion V darüber hinaus gewisse Integralformeln beinhaltet, dann werden auch die davon anhängenden Terme zu jener Gleichung hinzugefügt werden müssen, in welchem Fall die ganze Rechnung sehr weite Umwege erfordert, welche ich aber an dieser Stelle nicht beschreiten werde, sondern ich werde allein bei der hier angegebenen Gleichung bleiben.

§11 Daher ist es also offenkundig, dass die Gleichung für das Maximum oder Minimum nur Geltung haben kann, wenn die Geschwindigkeit v eine bestimmte Funktion der beiden x und y ist oder die Formel $\int(Xdx + Ydy)$ tatsächlich eine Integration zulässt, welchen Fall ich also hier genauer betrachten werde. Weil also für unsere Brachystochronen

$$\int Vdx = \int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} \quad \text{und daher} \quad V = \frac{\sqrt{1+pp}}{v}$$

ist, wird

$$dV = -\frac{dv}{vv}\sqrt{1+pp} + \frac{pdp}{v\sqrt{1+pp}}$$

sein, wo also anstelle von dv sein Wert in dx und dy ausgedrückt eingesetzt werden muss. Oben haben wir aber diese Gleichung gehabt: $vdv = 2g(Xdx + Ydy)$, woher

$$dv = \frac{2g}{v}(Xdx + Ydy)$$

wird, und so wird dv teils durch dx, teils durch dy ausgedrückt; deswegen, wenn dieser Wert eingesetzt wird und der Vergleich mit der oben erwähnten allgemeinen Formel angestellt wird:

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{etc.},$$

wird

$$M = -\frac{2gX\sqrt{1+pp}}{v^3}, \quad N = -\frac{2gY\sqrt{1+pp}}{v^3},$$
$$P = \frac{p}{v\sqrt{1+pp}}, \quad Q = 0, \quad R = 0 \quad \text{etc.}$$

werden und so werden wir für die Brachystochrone nun diese einfache Gleichung haben: $N - \frac{dP}{dx} = 0$ oder $Ndx = dP$, sodass nun der Wert von P erneut differenziert werden muss. Es wird aber

$$dP = -\frac{dv}{vv} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

und daher

$$dP = -\frac{2g(Xdx + Ydy)}{v^3} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} + \frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

sein, welchem Ausdruck also die Größe

$$Ndx = -\frac{2gYdx\sqrt{1+pp}}{v^3}$$

gleich werden muss, aus welcher Gleichung man weiter berechnet, dass

$$\frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2gXdx}{v^3} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} - \frac{2gYdx}{v^3\sqrt{1+pp}}$$

oder

$$\frac{1}{v} d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2g}{v^3\sqrt{1+pp}}(Xdy - Ydx)$$

sein wird.

§12 Oben haben wir aber gesehen, dass die aus dem angreifenden Kräften resultierende und in Richtung yN wirkende Normalkraft $\frac{Xdy-Ydx}{ds}$ ist, wenn welche Θ genannt wird, sodass

$$\Theta = \frac{Xdy - Ydx}{dx\sqrt{1+pp}}$$

ist, wird unsere gefundene Gleichung

$$\frac{1}{v}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{2g\Theta dx}{v^3}$$

sein und daher wird

$$\Theta = \frac{vv}{2gdx}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

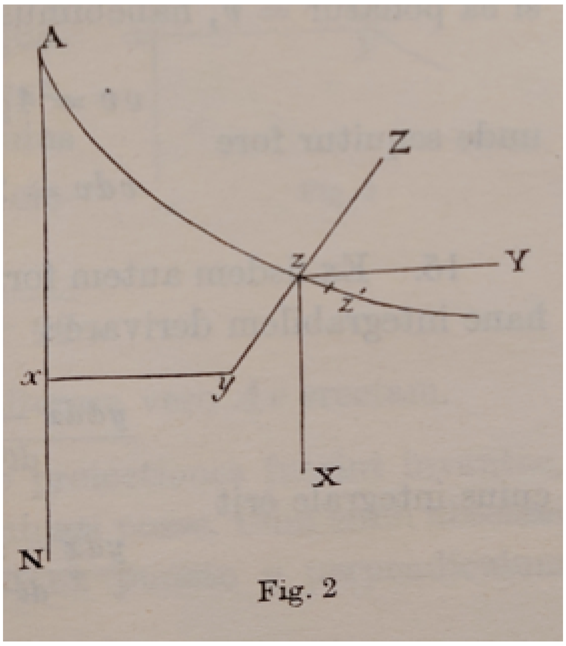
sein. Es ist aber $d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ und so wird

$$\Theta = \frac{vv}{2gdx} \cdot \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

sein. Wir haben aber gesehen, dass der Krümmungsradius im Punkt y ja $\frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$ ist, wenn welcher r genannt wird, wird $\Theta = \frac{vv}{2gr}$ werden. Es ist aber bekannt, dass diese Formel $\frac{vv}{2gr}$ die Zentrifugalkraft ausdrückt, mit welcher die Kurve im Punkt y vom herabsinkenden Körper wegen der Krümmung belastet wird, welche Kraft wir also nun sehen, immer gleich der Normalkraft Θ zu sein, sooft die Formel $\int(Xdx + Ydy)$ eine Integration zulässt, andernfalls aber die Gleichung für die Brachystochrone sich weit anders verhalten wird und ihre Bestimmung höchst verwickelte Rechnung erfordert. Es trägt sich aber in angenehmer Weise zu, sooft der Körper von echten Kräften, von welcher Art die Schwerkraft und jegliche und in beliebiger Art entsprechend irgendwelcher Funktionen des Abstands angreifende Zentripetalkräfte sind, dass die Formel $\int(Xdx + Ydy)$ eine Integration zulässt und daher das oben aufgestellte Prinzip tatsächlich Geltung hat. Es werden nur vollkommen imaginäre Kräfte ausgeschlossen, welche nicht einmal einen Platz in der Natur der Dinge finden können.

II. Über nicht in derselben Ebene liegende Brachystochronen

Dieser Fall ereignet sich, wannimmer die Kräfte, von welchen der Körper gleichzeitig angegriffen wird, nicht in derselben Ebene gelegen waren. Es sei also die Kurve Az (Fig. 2) die gesuchte Brachystochrone, über welcher der Körper vom Punkt A begonnen worden ist bewegt zu werden.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Also wollen wir jedweden Punkt z von ihr mit drei Koordinaten bestimmen, sie seien $Ax = x$, $xy = y$, $Yz = z$; das Kurvenelement zz' nenne man hingegen $= ds$, sodass $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist. Aber die angreifenden Kräfte, wie auch immer sie beschaffen waren, führe man auf dieselben drei festen Richtungen zurück und nenne sie $zX = X$, $zY = Y$, $zZ = Z$, welche Größen also irgendwelche Funktionen der drei Variablen x, y, z sein können.

§14 Um nun die Bewegung der Kurve daraus zu bestimmen, wollen wir die ganze Sache aus den ersten Prinzipien der Bewegung heraus bestimmen, und nachdem das Zeitelement $= dt$ gesetzt worden ist, ist die Bestimmung der Bewegung des Körpers in diesen drei Formeln enthalten:

$$1^\circ.\ \frac{ddx}{dt^2} = 2gX, \quad 2^\circ.\ \frac{ddy}{dt^2} = 2gY, \quad 3^\circ.\ \frac{ddz}{dt^2} = 2gZ,$$

wo g wiederum die Höhe des Falls von schweren Körpern in der ersten Minutensekunde bezeichnet, wenn wir freilich die Zeit t in Minutensekunden ausdrücken wollen. Nun werden die erste Gleichung mit dx, die zweite mit dy die dritte mit dz multipliziert und integriert geben:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 4g \int (Xdx + Ydy + Zdz),$$

welche Gleichung wegen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ aus diese reduziert wird:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4g \int (Xdy + Ydy + Zdz).$$

Daher, weil $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit ausdrückt, mit welcher der Körper das Element zz' durchläuft, wenn sie $= v$ gesetzt wird, werden wir diese Bestimmung von ihr haben:

$$vv = 4g \int (Xdx + Ydy + Zdz),$$

woher folgt, dass

$$vdv = 2g(Xdx + Ydy + Zdz)$$

sein wird.

§15 Es wird aber gefällig sein, aus denselben Formeln auch diese integrierbare abzuleiten:

$$\frac{yddx - xddy}{dt^2} = 2g(yX - xY),$$

deren Integral

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = 2g \int (yX - xY)dt$$

sein wird. Weil wir gerade $\frac{ds^2}{dt^2} = vv$ gefunden haben, wollen wir $\frac{ds^2}{vv}$ anstelle von dt^2 schreiben und es wird

$$\frac{ydx - xdy}{ds} = \frac{2g}{v} \int (Xy - Yx)\frac{ds}{v}$$

sein. Auf die gleiche Weise werden wir

$$\frac{zdx - xdz}{ds} = \frac{2g}{v} \int (Xz - Zx) \frac{ds}{v}$$

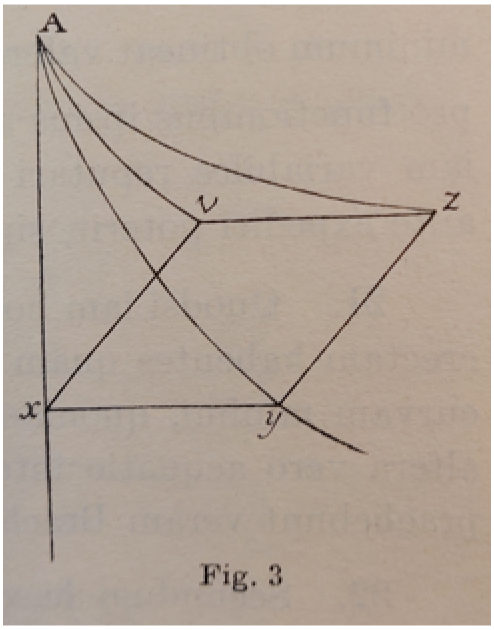
finden, schließlich

$$\frac{zdy - ydz}{ds} = \frac{2g}{v} \int (Yz - Zy) \frac{ds}{v}.$$

Und es wird förderlich sein, diese Formeln für das folgende Unterfangen bemerkt zu haben.

§16 Nachdem die Geschwindigkeit des Körpers schon gefunden worden ist, ist eine solche Relation zwischen den drei Koordinaten x, y, z ausfindig zu machen, dass die Zeit, in welcher der Kurvenbogen Az durchlaufen wird, die kleinste von allen wird. Bei dieser Aufgabe ist also zur isoperimetrischn Methode zurückzukehren. Aber diese Methode, wie ich sie freilich behandelt habe, ist für nur zwei Variablen formuliert; dennoch lässt sich indes auch diese Frage auf den Fall von zwei Variablen zurückführen, wenn wir freilich zur Hilfe nehmen, was über Projektionen von nicht in derselben Ebene liegenden Kurven gelehrt worden ist.

§17 Wir wollen also die Projektion unserer Kurve Az (Fig. 3) auf die Tischebene betrachten, welche Ay sei, deren Natur also mit einer Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y ausgedrückt werden wird, für welche wir $dy = pdx$ setzen wollen, und das Kurvenelemnent dieser Projektion wird $= dx\sqrt{1 + pp}$ sein.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

In gleicher Weise sei in der zu Tischebene normalen Ebene über der Achse Ax die Projektion Av unserer Kurve konstruiert worden, deren Natur also mit einer Gleichung zwischen diesen zwei Variablen $Ax = x$ und $xv = yz = z$ ausgedrückt werden wird, für welche wir $dz = qdx$ setzen wollen, dass das Element dieser Projektion $dx\sqrt{1+qq}$ ist. Es ist aber ersichtlich, dass das Element der wahren Kurve Az

$$= ds = dx\sqrt{1+pp+qq}$$

sein wird. Die erste geworfene Projektion wollen wir Ay nennen, die andere konstruierte hingegen Av.

§18 Es ist aber offensichtlich, wenn diese beiden Projektionen gefunden worden sind, dass aus ihnen zusammen die Kurve Az sehr leicht bestimmt werden kann. Weil nämlich diese Abszisse $AX = x$ jeder der beiden Projektion gemein ist, wenn wir vom Punkt y aus das xv gleiche Lot yz errichten, wird der Punkt z auf der gesuchten Kurve liegen. Aber nur eine dieser Projektionen erfüllt die Aufgabe keinesfalls, weil so die geworfene wie wie konstruierte Projektion unendlich vielen Kurven zukommen kann.

§19 Nachdem diese Dinge sorgfältig bemerkt worden sind, wird die Frage über das gesuchte Minimum so in zwei Teilen gestellt werden können. Zuerst wollen wir natürlich die konstruierte Projektion als gegeben betrachten und unter allen Kurven, denen dieselbe konstruierte Projektion entspricht, die suchen, in welcher die Integralformel $\int \frac{ds}{v}$ einen minimalen Wert erhält, was mit nur zwei Koordinaten geleistet werden können wird. Weil nämlich die konstruierte Projektion Axv als gegeben angesehen wird, wird ihre Ordinate z als Funktion der Abszisse x angesehen werden können und in gleicher Weise wird auch die Größe $q = \frac{dz}{dx}$ eine Funktion von x sein, und wenn wir die isoperimetrischen Lehren auf diesen Fall anwenden, werden wir unter allen Kurven, welche dieselbe konstruierte Projektion haben, die finden, für welche die Formel $\int \frac{ds}{v}$ den kleinsten Wert erhält.

§20 Auf dieselbe Weise werde die geworfene Projektion Axy als bekannt angesehen und unter allen Kurven, die diese Projektion gemeinsam haben, suche man vermöge der Methode der Maxima und Minima diejenige, für welche dieselbe Formel $\int \frac{ds}{v}$ den mininmalen Wert erhält, und nun werden in dieser Untersuchung so y wie $p = \frac{dy}{dx}$ für Funktionen von x gehalten werden können, sodass nur die beiden übrigen Variablen x und z überhaupt als Variablen behandelt werden müssen und die Rechnung wird mithilfe der Lehren wie zuvor erledigt werden können, wenn wir nur z anstelle von y und q anstelle von p schreiben.

§21 Wenn wir nun auf diese Weise so unter allen Kurven, welche dieselbe konstruierte Projektion haben, wie denen, die dieselbe geworfene Projektion haben, die Kurve des Minimums gefunden haben, weil ja für die erste eine gewisse Gleichung zwischen x und y hervorging, für die andere hingegen eine Gleichung zwischen x und z, werden diese zwei Bestimmungen zusammen genommen die wahre Brachystochrone liefern, unter gänzlich allen möglichen.

§22 Gemäß dieser Vorschriften wird es nun leicht sein, die Brachystochronen oder die Kurven zu finden, in welchen die Formel

$$\int \frac{dx\sqrt{1+pp+qq}}{v}$$

den kleinsten Wert annimmt. Hier ist aber, wie zuvor, notwendig, dass v eine bestimmte Funktion der Variablen x, y, z ist, was nur passieren kann, wenn die Formel

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{vv}{4g}$$

eine Integration zulässt, weswegen wir hier allein diesen Fall behandeln werden. Daher wird also

$$vdv = 2g(Xdx + Ydy + Zdz) \quad \text{und daher} \quad dv = \frac{2g}{v}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

sein. Zuerst wollen wir also die konstruierte Projektion als gegeben ansehen, sodass so z wie q Funktionen allein von x sind; daher, wenn wir

$$d \cdot \frac{\sqrt{1 + pp + qq}}{v} = Mdx + Ndy + Pdp$$

setzen, wird die Gleichung für die gesuchte Kurve $Ndx - dP = 0$ sein, wo es sich in angenehmer Weise zuträgt, dass die Größe M nicht in diese Gleichung eingeht.

§23 Weil wir ja also der Größe M überhaupt nicht bedürfen, kommen in dieser Differentiation nur zwei Variablen in Betracht, nämlich y und p, weil man ja z und q für Funktionen von x hält und deren Differentiale im Glied Mdx enthalten sind, welches sich verwerfen lässt. Daher müssen die Werte der Buchstaben N und P durch Differentiation gesucht werden, und weil ja die Größe p in die Geschwindigkeit v nicht eingeht, entspringt für den Term Pdp daraus sofort

$$P = \frac{p}{v\sqrt{1 + pp + qq}}.$$

§24 Es bleibt also die Variable v zurück, welche wie eine Funktion nur von y betrachten werden können wird, und so wird für unsere gegenwärtige Anwendung

$$dv = \frac{2gYdy}{v} \quad \text{und daher} \quad d \cdot \frac{1}{v} = -\frac{2gYdy}{v^3}$$

sein, und so wird

$$N = -\frac{2gY}{v^3} \cdot \sqrt{1 + pp + qq}$$

sein. Daher wird also diese gesuchte Gleichung gefunden:

$$+\frac{2gYdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+d\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0.$$

§25 In gleicher Weise, wenn wir die geworfene Projektion als bekannt annehmen, dass nun y und p Funktionen nur von x sind, wird die zuvor gefundene Gleichung auf diesen Fall übertragen, wenn nur die Buchstaben y und z und ebenso p und q miteinander vertauscht werden. Auf diese Weise geht diese Gleichung hervor:

$$\frac{2gZdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+d\cdot\frac{q}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

welche Gleichung mit der vorhergehenden verbunden die gesuchte Brachystrochrone bestimmen wird, weil ihre Bestimmung ja zwei Gleichungen verlangt, deshalb weil für jede beliebige Abszisse x die beiden übrigen y und z bestimmt werden müssen.

§26 Siehe also, die Auflösung unseres Problems ist in diesen zwei Gleichungen enthalten:

$$\frac{2gYdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+d\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0$$
$$\frac{2gZdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq}+d\cdot\frac{q}{v\sqrt{1+pp+qq}}=0,$$

wo nun gänzlich alle Größen für Variablen zu halten sind. Hier wird es aber förderlich sein diese letzten Formeln ein wenig weiter zu entwickeln, und zwar mithilfe dieser Reduktion:

$$d\cdot\frac{p}{v\sqrt{1+pp+qq}}=-\frac{dv}{vv}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}+\frac{1}{v}d\cdot\frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}}.$$

Nun wird aber wegen

$$dv=\frac{2g(Xdx+Ydy+Zdz)}{v}$$

auch

$$\frac{dv}{v^3} + \frac{2g(Xdx + Ydy + Zdz)}{v^3}$$

sein und daher werden unsere zwei Gleichungen die folgenden Formen annehmen:

$$\frac{2gYdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq} - \frac{2g(Xdx + Ydy + Zdz)}{v^3} \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{1}{v}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0,$$

$$\frac{2gZdx}{v^3}\sqrt{1+pp+qq} - \frac{2g(Xdx + Ydy + Zdz)}{v^3} \cdot \frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{1}{v}d \cdot \frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0.$$

Man multipliziere diese Gleichungen mit $\frac{v^3}{2g}$ und die ersten Teile werden auf den Nenner $\sqrt{1+pp+qq}$ gebracht auf die folgende Weise dargestellt:

$$\frac{(Y(1+qq) - pX)dx - pZdz}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2g}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0$$

$$\frac{(Z(1+qq) - qX)dx - qYdy}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2g}d \cdot \frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0,$$

welche Gleichungen weiter wegen $dy = pdx$ und $dz = qdx$ so transformiert werden:

$$\frac{Y(1+qq) - pX - pqZ}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2gdx}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0$$

$$\frac{Z(1+qq) - qX - pqY}{\sqrt{1+pp+qq}} + \frac{vv}{2gdx}d \cdot \frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}} = 0.$$

Wenn wir also her die z und q enthaltenden Terme eliminieren, entspringt die für den vorgehenden Fall gefundene Gleichung offenkundig aus der ersten Gleichung, aus welcher natürlich hervorgeht:

$$\frac{Xp - Y}{\sqrt{1+pp}} = \frac{vv}{2g}d \cdot \frac{p}{\sqrt{1+pp}},$$

welche Gleichung mit der oben gefundenen außerordentlich übereinstimmt; die zweite Gleichung verschwindet hingegen für diesen Fall völlig.